FICHE RÉCAPITULATIVE ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

April 14, 2021

1 1)ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES SANS SECOND MEMBRE

La solution générale de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants **y'= ay** est

y=C$\mathbf{e}^{ax}$ où C est une constante

<u>*Exemple :*</u> On considère l'équation différentielle 3y'+5y=0

a)Déterminer la solution générale de l'équation

3y' = -5y

y'=-$\frac{5}{3}y$

y_c(x) = C$e^{-\frac{5}{3}x}$

b)Déterminer l'unique solution tel que y(1)=2

C$e^{-\frac{5}{3}*1}$ = 2

C=2$e^{\frac{5}{3}}$

y(x)=2$e^{\frac{5}{3}}e^{-\frac{5}{3}x}$=2$e^{(\frac{5}{3}-\frac{5}{3}x)}$

2 2)ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES AVEC SECOND MEMBRE

La solution générale de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants **y'=ay+b** est

y=C$\mathbf{e}^{ax}-\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}$

<u>*Exemple :*</u> On considère l'équation différentielle 2y'-y=3

a)Déterminer la solution générale de l'équation

2y' = y+3

y'=$\frac{1}{2}y+\frac{3}{2}$

y_c(x)=C$e^{\frac{1}{2}x}-\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}$ =C$e^{\frac{1}{2}x}-3$

b)Déterminer l'unique solution tel que y(0)=-1

C$e^{\frac{1}{2}*0}-3$=-1

C-3=-1

C=3-1=2

y(x)=2$e^{\frac{1}{2}x}$-3

3 3)ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES AVEC SECOND MEMBRE VARIABLE

La solution générale de l'équation différentielle linéaire à second membre variable de la forme **y'= ay + f(x)**, possède une solution qui est la somme des fonctions déterminées chacune dans 2 étapes de calcul.

On commence par résoudre l'équation différentielle sans second membre et ensuite, nous allons trouver une solution particulière répondant à l'équation générale.

Avec un exemple c'est plus parlant.

<u>*Exemple :*</u> On considère l'équation différentielle 3y'+5y=x^2

Etape 1 : trouver une solution générale de l'équation 3y'+5y=0

Nous connaissons sa solution, abordée au premier point de ce chapitre.

3y'= -5y

y' =-$\frac{5y}{3}$

l'ensemble des solutions sont la forme y = Ce$^{-\frac{5}{3}x}$

Etape 2 : trouvons maintenant une solution particulière à l'équation générale

Comme cette solution respecte l'équation différentielle, elle doit être un polynôme du second degré de la forme y=a$x^2 + bx + c$

Calculons y' : y' = 2ax + b

Intégrons ceci dans l'équation différentielle : 3y'+5y=x^2

6ax+3b+5ax^2+5bx+5c=x^2

quand 2 polynômes sont égaux, ils sont égaux point par point

5ax^2+(6a+5b)x+(3b+5c)=x^2+0x+0

nous avons alors:

5a=1

6a+5b=0

3b+5c=0

Cela nous donne a=$\frac{1}{5}$

5b=-6a donc b=-$\frac{6a}{5}$=-$\frac{6}{25}$

5c=-3b donc c=-$\frac{3b}{5} = -\frac{18}{125}$

Le solution particulière sous forme de polynôme est de la forme:$\frac{x^2}{5}$-$\frac{6x}{25} - \frac{18}{125}$

La solution finale de l'équation différentielle est la somme des deux solutions précédentes, donc :

y=Ce$^{-\frac{5}{3}x}$+$\frac{x^2}{5}$-$\frac{6x}{25} - \frac{18}{125}$ où C